Rozšíření MA1.
Domácí úkol 1a. – lineární algebra 1

1. a) Definujte pojem báze vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané bázi.
   b) Ukažte dle definice, že vektory
   $$\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,\ -1,\ -1),\ \vec{b}_3 = (0,\ 1,\ -2)$$
   tvoří bázi prostoru R^3 .
   c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1,-1,1)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.
   d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

---

a) Je-li V vektorový prostor, pak báze V je skupina vektorů $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$, $\vec{b_i} \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$, taková, že

(i) $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ jsou lineárně nezávislé vektory (LNZ)

(ii) každý vektor $\vec{v} \in V$ je jejich lineární kombinací (LK), tj. existují čísla $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tak, že

(*) $\quad \vec{v} = v_1\vec{b_1} + v_2\vec{b_2} + \dots + v_n\vec{b_n}$, přičemž n-tice $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^N$ je dána jednoznačně (tj. existuje jediná n-tice $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^n$ tak, že platí (*))

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ – souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$.

(iii) důležitá poznámka: má-li prostor V báze $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$, pak má V nekonečně mnoho „jiných" báze a všechny tyto báze prostoru V mají stejný počet vektorů; počet prvků báze prostoru V je dimenze prostoru V – píšeme $\underline{\dim V = n}$ (zde)

b) Máme-li ukázat, že daná trojice vektorů
$\vec{b_1} = (1, -1, 0)$, $\vec{b_2} = (1, -1, -1)$, $\vec{b_3} = (0, 1, -2)$
tvoří bázi prostoru R^3, stačí ukázat, že dané vektory jsou LNZ, protože je to trojice vektorů a v R^3 už máme „základní" bázi $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$ o třech prvcích; tedy jakákoliv trojice LNZ vektorů z R^3 je báze R^3.

a LNZ vektorů $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ můžeme ukázat „úpravou" téže skupiny vektorů nebo úpravou matice, „vytvořené" z daných vektorů (řádky nebo i sloupce mohou být zadané vektory – – hodnost matice je rovna hodnosti matice transponované) – – připomenutí – ekvivalentní úpravy matice (nebo i skupiny vektorů) „nemění" LZ či LNZ řádků matice (skupiny vektorů); nebo můžeme „spočítat" determinant matice „vytvořené" z daných vektorů a víme, že (matice A je čtvercová)

det A ≠ 0 ⟺ A je regulární ⟺ řádky i sloupce matice A jsou LNZ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

<u>vektory $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ (řádky matice B) jsou LNZ, tedy tvoří bázi R^3</u> ;

nebo užitím determinantu :

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \text{(úprava – od 2. řádku odečteme 1. řádek)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-(-1)) = 1 \Rightarrow$$

(rozvoj dle 1. sloupce)

⇒ řádky matice B, tj. vektory $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ jsou LNZ, tedy $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ je báze prostoru R^3.

c) a d) můžeme řešit „současně" – obecný návod na výpočet souřadnic v d) pak užijeme i pro konkrétní vektor $\vec{x} = (1,-1,1)$ v úloze c):

d) Je-li dána báze $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ prostoru R^3, a máme-li najít souřadnice vektoru $\vec{x} \in R^3$ ~~vzhledem~~ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, znamená to najít trojici $(\alpha, \beta, \gamma) (\in R^3)$ tak, aby

$$\vec{x} = \alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3},$$

tj. (vektory píšeme jako „sloupcové"), aby

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

(α, β, γ) je tedy řešením soustavy lineárních rovnic

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta \phantom{{}+\gamma} &= x_1 \\ -\alpha - \beta + \gamma &= x_3 \\ -\beta - 2\gamma &= x_4 \end{aligned}\right\} (*) .$$

Soustavu (*) můžeme řešit třeba

(i) Gaussovou eliminační metodou (zde snadno i „Gauss – Jordanem")

nebo

(ii) užitím inverzní matice k matici soustavy, která je regulární, neboť sloupce matice soustavy (*) jsou vektory $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ dané báze (tedy LNZ, a matice je tedy regulární)

(i) Gaussova (Gauss-Jordanova) eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 \end{array}\right) \overset{1.ř.+2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} 3.ř. + 2\times 2.ř. \\ \text{a pak „výměna"} \\ 2.ř. \leftrightarrow 3.ř. \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2x_1+2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} 1.ř.+2.ř. \\ \text{a pak} \\ (-1)\times 2.ř. \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1+2x_2+x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -2x_1-2x_2-x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \end{array}\right) ;$$

tedy, řešení soustavy (*) je (píšeme do „sloupce")

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+2x_2+x_3 \\ -2x_1-2x_2-x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Užitím inverzní matice k matici soustavy:

soustavu (*) lze napsat i následujícím způsobem („maticově")

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ pak } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

tedy, vidíme, že z i) dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A zkouška „správnosti": $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$ (matice jednotková)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A zkusme si ještě ukázat výpočet inverzní matice k matici soustavy (*) (Gauss-Jordanovou metodou) (úpravy jako v i))

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ tj.}$$

opět „máme"
$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

A řešení úkolu c):

souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, -1, 1)$ v „nové" bázi:

$$\underline{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2. Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:

$$\vec{u}_1 = (1, \ -1, \ 2, \ 3) \ , \quad \vec{u}_2 = (0, \ 2, \ 1, \ 0) \ , \quad \vec{u}_3 = (0, \ 0, \ -1, \ 1) \ .$$

a) Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.

b) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ bázi prostoru R^4 ? Své tvrzení odůvodněte.

Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4.

c) Zjistěte, zda vektory $\vec{v} = (1, \ -3, \ -1, \ 5)$, resp. $\vec{w} = (-1, \ 1, \ -3, \ -2)$ jsou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, a pokud ano, najděte, jakou kombinací.

Jinak řečeno – máte rozhodnout, zda vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou prvky lineárního obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

---

a) Lineární nezávislost vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ je zřejmá, pokud budeme dané vektory uvažovat jako řádky matice (ve stejném pořadí) :

pak dostaneme HTM matici $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, jejíž

diagonální prvky jsou nenulové, tedy řádky matice (a tedy i „naše" zadané vektory) jsou lineárně nezávislé – zřejmě žádný z daných vektorů není lineární kombinací ostatních dvou vektorů (LNZ dle jedné „verse" definice)

Zkusme ještě „procvičit" obecnou verzi definice LNZ vektorů :

vektory $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ ($v_i \in V$, $i = 1, \dots k$, V - vektorový prostor) jsou LNZ , právě když platí :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

A v našem příkladu : $V = R^4$, $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ jsou LNZ , právě když platí :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ ;$$

Pro koeficienty v LK, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ máme tedy soustavu lineárních rovnic :

$$\begin{array}{llr}
(1) & \underline{\alpha_1 \qquad\qquad\qquad = 0} & \\
(2) & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \qquad\quad = 0 & \underset{(1)}{\Rightarrow} \ \underline{\alpha_2 = 0} \ , \\
(3) & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \\
(4) & 3\alpha_1 \qquad\quad - \alpha_3 = 0 & \underset{(1)}{\Rightarrow} \ \underline{\alpha_3 = 0}
\end{array}$$

tedy, dle definice, $\underline{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}}$ <u>jsou vektory lineárně nezávislé!</u>

b) Vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ netvoří bázi prostoru R^4, neboť bázi R^4 tvoří čtyři LNZ vektory ($\dim R^4 = 4$); na bázi tuto trojici doplní jakýkoliv vektor $\vec{u_4} \in R^4$, který není na vektorech $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ LZ, tj. neleží v jejich lineárním obalu (jinými slovy), například $\vec{u_4} = (0,0,0,1)$.

c) Obecně, vektor $\vec{v}$ je prvek lineárního obalu vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$, právě tehdy když je lineární kombinací vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$, tedy, existují-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ tak, že ($\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$)

$$(*) \qquad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} ,$$

řešíme tedy soustavu lineárních rovnic s maticí soustavy, jejíž sloupce jsou dané vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ a pravá strana vektor $\vec{v} = (1, -3, -1, 5)$, resp. $\vec{w} = (-1, 1, -3, -2)$. Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou („najednou" pro obě „pravé strany"):

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{1.ř + 2.ř \\ 3ř - 2\times 1.ř \\ 4ř - 3\times 1.ř}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{2ř/2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{-3.ř + 2.ř}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{4.ř - 3.ř}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad ;$$

Odtud plyne, že vektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jsou LK vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, tedy oba vektory leží v lineárním obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

a (i) pro $\vec{v} = (1, -3, -1, 5)$ je řešením soustavy (*)

$$\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = -1, \ \alpha_3 = 2,$$

tedy, $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$;

(ii) pro $\vec{w} = (-1, 1, -3, -2)$ je řešením soustavy (*)

$$\alpha_1 = -1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 1,$$

tedy, $\vec{w} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_3$.

3. Je dána matice $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete hodnost matice A.

b) Co můžete říct na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic (*)?

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

a) Hodnost matice je počet lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců matice (hodnost matice se rovná hodnosti matice transponované). Hodnost matice se nemění při ekvivalentních úpravách matice – upravíme tedy danou matici pomocí ekvivalentních úprav na HTM matici, a odtud už bude hodnost matice „zřejmá" („už bude vidět"):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{4.ř. \leftrightarrow 1.ř.}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{4ř.+1.ř.}{\overset{2ř.+2\times 1.ř.,\ 3ř.+2\times 1.ř.}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{2.ř. \leftrightarrow 4.ř.}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{4.ř.-2\times 2.ř.}{\overset{3ř.-2.ř.}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A},$$

tedy, $h(A) = 3$ (protože tři řádky matice $\tilde{A}$ jsou lineárně nezávislé)

b) Je-li hodnost matice soustavy (*) $h(A) = 3$, pak množina řešení homogenní soustavy (*) je podprostor R^4 dimense 1 (můžeme „volit" libovolně jednu z neznámých)
Po úpravě matice A (ne $\hat{A}$) máme pro řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

soustavu
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ \underline{x_4 = 0} \end{aligned}$$
, zvolíme $x_2 = t$, $t \in R$

a tedy dostaneme pak $\underline{x_3 = 3t,\ x_1 = x_2 + x_4 = t}$; $(t \in R)$
množinu řešení soustavy (*) můžeme „zapsat" ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in R,$$

a tedy množina řešení jsou všechny násobky nenulového vektoru, tedy podprostor R^4 dimense 1.

4. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A.

b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimenze 2.

---

a) Připomenutí:
vektory $\vec{v}, \vec{w} \in R^n$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \vec{o}$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \neq \vec{o}$ jsou navzájem ortogonální, když je jejich skalární součin roven nule, tj.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = 0.$$

Máme-li tedy najít všechny vektory $\vec{v} \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému řádku (tj. řádkovému vektoru) matice A, označíme-li $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, máme najít všechny vektory $\vec{v} \in R^4$, pro které platí:

$$\left.\begin{array}{lll} (1,-1,1,2)(v_1,v_2,v_3,v_4)=0, & \text{tj.} & v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 0 \\ (-1,2,0,-3)(v_1,v_2,v_3,v_4)=0, & \text{tj.} & -v_1 + 2v_2 - 3v_4 = 0 \\ (1,0,2,1)(v_1,v_2,v_3,v_4)=0, & \text{tj.} & v_1 + 2v_3 + v_4 = 0 \end{array}\right\} (*)$$

tedy, máme řešit soustavu lineárních rovnic pro v_1, v_2, v_3, v_4, s maticí soustavy, kterou je zadaná matice A.

Budeme řešit Gaussovou eliminační metodou (opět) (na další straně). Soustava (*) je soustava homogenní, má tři rovnice pro čtyři neznámé, tedy množina řešení soustavy (*) bude netriviální podprostor prostoru R^4.

Řešíme soustavy (*) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{3.ř.-1.ř.}{\overset{2.ř.+1.ř.}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy, pro v_1, v_2, v_3, v_4 máme soustavu dvou nezávislých "rovnic" pro čtyři neznámé (lze tedy volit dvě neznámé):

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 &= 0 \\ v_2 + v_3 - v_4 &= 0 \end{aligned}$$

zvolme $\underline{v_3 = t, \quad v_4 = s, \quad t, s \in R}$; pak

$$v_2 = -v_3 + v_4 = -t + s$$

$$v_1 = v_2 - v_3 - 2v_4 = (-t+s) - t - 2s = -2t - s \;;$$

Tedy, řešení jsou všechny vektory (píšeme ve sloupcích)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t - s \\ -t + s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in R,$$

tedy odtud vidíme, že množina řešení soustavy (*) je množina všech lineárních kombinací dvou lineárně nezávislých vektorů z R^4, tedy podprostor R^4 dimenze 2; neboli lineární obal dvou lineárně nezávislých vektorů

$(-2, -1, 1, 0)$ a $(-1, 1, 0, 1)$.